



### ใบความรู้ที่ 4.1 การหาแรงลัพธ์โดยวิธีคำนวณ

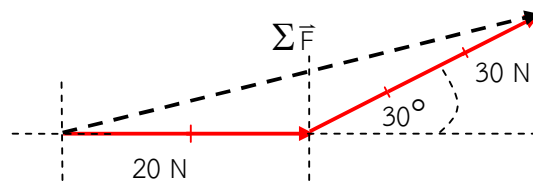
#### การคำนวณหาแรงลัพธ์ตามลักษณะแนวแรง

เมื่อออกแรงกระทำต่อวัตถุหนึ่ง ด้วยแรง 20 นิวตันกระทำไปทางขวา และ 30 นิวตันไปทางขวาเฉียงไปด้านบน ทำมุม 30 องศา กับแนวระดับ จะเกิดแรงลัพธ์ที่วัตถุนี้กี่นิวตัน



ถ้าตอบว่า 50 นิวตันเป็นคำตอบที่ผิด  
แสดงว่าผิดพลาดเกี่ยวกับการหาผลลัพธ์แบบเวกเตอร์

เมื่อพิจารณา จากวิธีสร้างรูป แรงลัพธ์ ( $\Sigma \vec{F}$ )  $\neq$  50 N



เราสามารถหา แรงลัพธ์ ( $\Sigma \vec{F}$ ) โดยวิธีคำนวณต่อไปนี้

การหาแรงลัพธ์โดยวิธีคำนวณแบบเวกเตอร์ จะมีสมการอยู่ในรูปทั่วไปดังนี้

$$\Sigma \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots$$

เมื่อหาแรงลัพธ์โดยวิธีคำนวณ สามารถนำมาพิจารณาลักษณะแนวแรง ดังนี้

#### 1. แนวเดียวกัน

##### 1.1 แรงมีทิศเดียวกัน

$$\Sigma \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 \Rightarrow$$

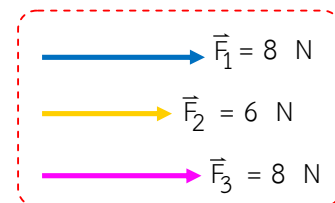
เปลี่ยนแรงแต่ละแรงไม่ให้อยู่ในรูปเวกเตอร์

และกำหนดให้แรงแรกมีค่าเป็นบวก

แรงแต่ละแรงถัดไปถ้ามีทิศเดียวกันก็จะมีค่าเป็นบวกด้วย

$$\Rightarrow \Sigma F = F_1 + F_2 + F_3$$

$$\Sigma F = 8 + 6 + 8 = 22 \text{ N}$$



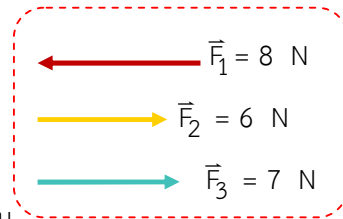


### 1.2 แรงมีทิศตรงข้ามกัน

$$\Sigma \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 \Rightarrow$$

เปลี่ยนแรงแต่ละแรงไม่ให้อยู่ในรูปเวกเตอร์  
และกำหนดให้แรงแรกมีค่าเป็นบวก

แรงแต่ละแรงถัดไปถ้ามีทิศตรงข้ามก็จะมีค่าเป็นลบ



$$\Rightarrow \Sigma F = F_1 - F_2 - F_3$$

$$\Sigma F = 8 - 6 - 7 = -5 \text{ N}$$

$$\Sigma F = 5 \text{ N} \text{ มีทิศไปทางขวา (เพราะแรง } \vec{F}_1 \text{ มีทิศไปทางซ้าย)}$$

หรือ  $\Sigma \vec{F} = \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_1$

$$\Rightarrow \Sigma F = F_2 + F_3 - F_1$$

$$\Sigma F = 6 + 7 - 8 = 5 \text{ N}$$

$$\Sigma F = 5 \text{ N} \text{ มีทิศไปทางขวา (เพราะแรง } \vec{F}_2 \text{ มีทิศไปทางขวา)}$$

### 2. ไม่อยู่ในแนวเดียวกัน

$$\Sigma \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \Rightarrow$$

เริ่มต้นในการศึกษา จะขอให้พิจารณาเพียง 2 แรง ดังนี้

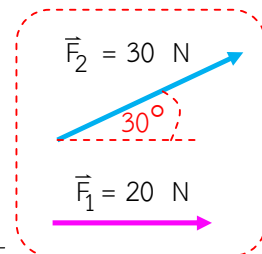
$$\Rightarrow \Sigma F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\theta}$$

$$\Sigma F = \sqrt{(30)^2 + (20)^2 + 2(30)(20)\cos 30^\circ}$$

$$\Sigma F = \sqrt{900 + 400 + 2(30)(20)(0.866)} \quad , \cos 30^\circ = 0.866$$

$$\Sigma F = \sqrt{900 + 400 + 1039.2}$$

$$\Sigma F = \sqrt{2339.2} = 48.37 \text{ N}$$



เมื่อ เราพิจารณา จากแรงลัพธ์ที่คำนวณได้

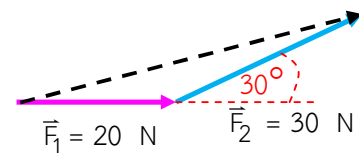
จะสอดคล้องกับการหาแรงลัพธ์โดยวิธีสร้างรูป

ถ้าตอบว่า 50 N จึงผิด

ดังนั้นในกรณีที่แรง 2 แรงไม่อยู่ในแนวเดียวกัน

เราจะหาขนาดแรงลัพธ์ ได้จากสมการนี้

$$\Sigma F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\theta}$$





ตัวอย่างการหาแรงลัพธ์โดยวิธีคำนวณ

**ตัวอย่างที่ 1** จงหาผลรวมของแรงลัพธ์ คือ  $\Sigma \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots$  นี้

ให้อยู่ในรูปสมการที่สามารถนำไปหาค่าแรงลัพธ์โดยวิธีคำนวณ  
ในกรณีที่แรงอยู่ในแนวเดียวกันหรือไม่อยู่ในแนวเดียวกัน  
ดังสัญลักษณ์แทนแรง ต่อไปนี้



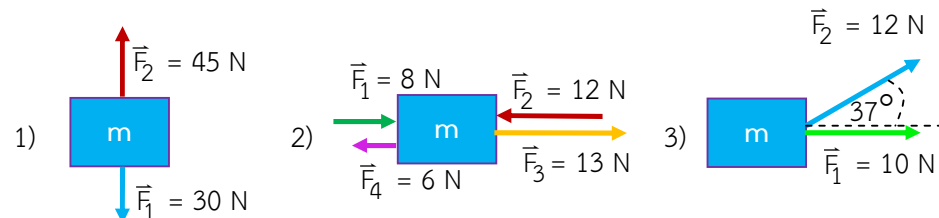
**วิธีทำ (Do)** 1) สมการของแรงลัพธ์ คือ  $\Sigma \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$

สมการนำไปคำนวณ คือ  $\Sigma F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos 37^\circ}$

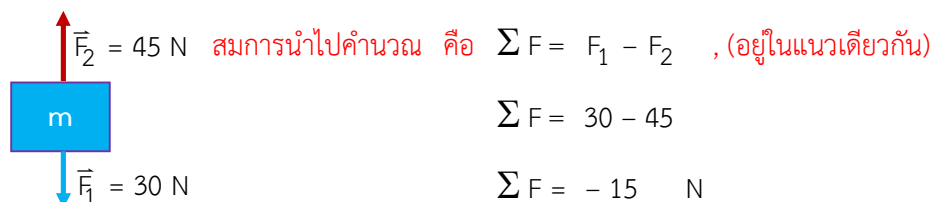
2) สมการของแรงลัพธ์ คือ  $\Sigma \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$

สมการนำไปคำนวณ คือ  $\Sigma F = F_1 - F_2 + F_3$

**ตัวอย่างที่ 2** จงหาแรงลัพธ์โดยวิธีคำนวณ ในกรณีที่แรงอยู่ในแนวเดียวกัน  
หรือไม่อยู่ในแนวเดียวกันดังสัญลักษณ์แทนแรง ต่อไปนี้



**วิธีทำ (Do)** 1) สมการของแรงลัพธ์ คือ  $\Sigma \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$



สมการนำไปคำนวณ คือ  $\Sigma F = F_1 - F_2$  , (อยู่ในแนวเดียวกัน)

$$\Sigma F = 30 - 45$$

$$\Sigma F = -15 \text{ N}$$

**ตอบ** แรงลัพธ์ มีค่าเท่ากับ 15 นิวตัน มีทิศขึ้นด้านบน ทางเดียวกับแรง  $\vec{F}_2$

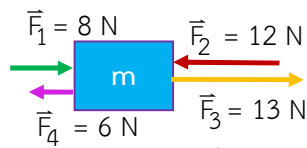
2) สมการของแรงลัพธ์ คือ  $\Sigma \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4$





## ความแรงและผลของแรงลัพธ์

สมการนำไปคำนวณ คือ  $\Sigma F = F_1 - F_2 + F_3 - F_4$  , (อยู่ในแนวเดียวกัน)



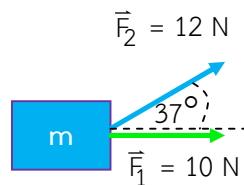
$$\Sigma F = 8 - 12 + 13 - 6$$

$$\Sigma F = 3 \text{ N}$$

ตอบ แรงลัพธ์ มีค่าเท่ากับ 3 นิวตัน มีทิศไปทางขวา ทางเดียวกับแรง  $F_1$

3) สมการของแรงลัพธ์ คือ  $\Sigma \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$

สมการนำไปคำนวณ คือ  $\Sigma F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\theta}$  , ทำมุม  $\theta$



$$\Sigma F = \sqrt{(10)^2 + (12)^2 + 2(10)(12)\cos 37^\circ}$$

$$\Sigma F = \sqrt{100 + 144 + 2(10)(12)(0.8)}$$

$$\Sigma F = \sqrt{100 + 144 + 192}$$

$$\Sigma F = \sqrt{432}$$

$$\Sigma F = 20.78 \text{ N}$$

ตอบ แรงลัพธ์ มีค่าเท่ากับ 20.78 นิวตัน ในข้อนี้  $37^\circ$  ไม่ใช่ทิศทางของแรงลัพธ์



### ข้อสังเกต

1. แรงลัพธ์  $\Sigma \vec{F}$  คำตอบควรมีทั้งขนาดและทิศทาง
2. แรงลัพธ์  $\Sigma F$  คำตอบมีเฉพาะขนาด
3. ทิศทางของ  $\Sigma F$  ในกรณีแรงไม่อยู่ในแนวเดียวกัน จะหาได้จาก

$$\tan \alpha = \frac{F_2 \sin \theta}{F_1 + F_2 \cos \theta}$$

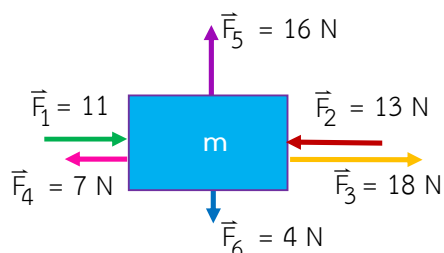
(รายละเอียดจะอยู่ในรายวิชาฟิสิกส์ ม.ปลาย)

4. ค่า  $\sin \theta$  ,  $\cos \theta$  และ  $\tan \alpha$  ให้เปิดตารางตรีโกณมิติท้ายเล่ม





ตัวอย่างที่ 3 จงหาแรงลัพธ์โดยวิธีคำนวณ ในกรณีที่แรงกระทำอยู่ในแนวแกน x และแกน y



วิธีทำ (Do) 1) สมการของแรงลัพธ์ในรูปเวกเตอร์ทั่วไป

$$\Sigma \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 + \vec{F}_5 + \vec{F}_6$$

สมการของแรงลัพธ์ในรูปเวกเตอร์ในแนวแกน x และ แกน y เป็นดังนี้

$$\Sigma \vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y, \text{ แกน } x \text{ และ แกน } y \text{ ทำมุมกัน } 90^\circ$$

ดังนั้น สมการที่ใช้หาขนาดแรงลัพธ์ ในแนวแกน x และแกน y คือ

$$\Sigma F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \dots\dots\dots *** (\text{ตั้งฉาก})$$

2) พิจารณาจากภาพพบว่า มีแรงกระทำในแนวแกน x และแกน y ดังนั้นให้หาแรงลัพธ์ในแนวแกน x และแกน y ดังนี้

$$\vec{F}_x = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4$$

$$F_x = F_1 - F_2 + F_3 - F_4 = 11 - 13 + 18 - 7 = 9 \text{ N}$$

$$\vec{F}_y = \vec{F}_5 + \vec{F}_6$$

$$F_y = F_5 - F_6 = 16 - 4 = 12 \text{ N}$$

หาแรงลัพธ์  $\Sigma F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$

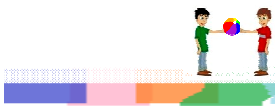
แทนค่า  $\Sigma F = \sqrt{(9)^2 + (12)^2}$

$$\Sigma F = \sqrt{81 + 144} = \sqrt{225} \text{ N}$$

$$\Sigma F = 15 \text{ N}$$

ตอบ แรงลัพธ์ มีขนาดเท่ากับ 15 นิวตัน





### การวิเคราะห์ด้วยเทคนิค KWDL

เทคนิค KWDL เป็นกระบวนการแก้ปัญหา ด้วยทักษะการคิดวิเคราะห์อย่างเป็นระบบ โดยวิเคราะห์ปัญหานั้นมีข้อมูลอะไรที่เรารู้ และต้องการรู้อะไร ต้องนำความรู้ใดมาใช้แก้ปัญหา และสรุปสิ่งที่ได้จากการเรียนรู้

เทคนิค KWDL จะมีขั้นตอนวิเคราะห์แก้ปัญหา ทั้งหมด 4 ขั้นตอนดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 Know ( K ) รู้ข้อมูลอะไรจากปัญหา โดยเขียนข้อมูลที่รู้จากปัญหาทั้งหมด รวมถึงข้อมูลจากความรู้เดิม

ขั้นตอนที่ 2 Want ( W ) ต้องการรู้อะไร โดยเขียนปัญหาที่ต้องการทราบ

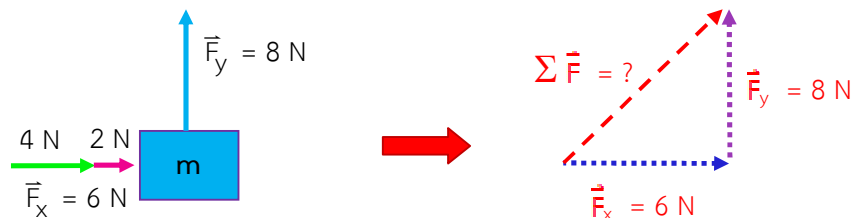
ขั้นตอนที่ 3 Do ( D ) ทำอย่างไร โดยเขียนความรู้ที่จะนำมาใช้ และสิ่งที่วิเคราะห์ เชื่อมความสัมพันธ์ สำหรับแก้ปัญหา

ขั้นตอนที่ 4 Learn ( L ) เรียนรู้แล้วได้อะไร โดยเขียนสรุปวิเคราะห์และแก้ปัญหาย่างไร

### ตัวอย่างการใช้การวิเคราะห์ด้วยเทคนิค KWDL

**ตัวอย่าง :** เมื่อมีแรงกระทำต่อวัตถุ  $m$  ทั้งหมด 3 แรง ถ้าแรง 2 แรงที่กระทำ มีขนาด 2 , 4 นิวตัน และมีทิศไปทางขวา อีก 1 แรง มีขนาด 8 นิวตันตั้งวัตถุขึ้น แรงลัพธ์ที่กระทำมีขนาดกี่นิวตัน

เขียนภาพแสดงสถานการณ์



#### 1. K (รู้อะไรจากปัญหา)

- 1.1 มีแรง 3 แรง
- 1.2 แรง 2 แรง ขนาด 2 , 4 นิวตัน และมีทิศไปทางขวา อยู่ในแนวแกน x
- 1.3 อีก 1 แรง ขนาด 8 นิวตันตั้งวัตถุขึ้น อยู่ในแนวแกน y

#### 2. W (ต้องการรู้อะไร) แรงลัพธ์ ( $\Sigma \vec{F}$ ) ที่กระทำมีขนาดกี่นิวตัน

#### 3. D (ทำอย่างไร)

3.1 ความรู้ที่เรียนมา คือ การหาแรงลัพธ์โดยวิธีคำนวณ สรุปได้ 2 ลักษณะ

1) แรงอยู่แนวเดียวกัน สมการแรงลัพธ์ในรูปเวกเตอร์  $\Sigma \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots$

- แรงมีทิศเดียวกัน สมการแรงลัพธ์วิธีคำนวณ  $\Sigma F = F_1 + F_2$

- แรงมีทิศตรงข้าม สมการแรงลัพธ์วิธีคำนวณ  $\Sigma F = F_1 - F_2$





## 2) แรงไม่อยู่แนวเดียวกัน

- เมื่อทำมุม  $\theta$  ไม่ตั้งฉาก  $\Sigma F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\theta}$

- เมื่อทำมุม  $90^\circ$  (ตั้งฉาก)  $\Sigma F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$

3.2 วิธีทำ แรงไปทางขวา  $F_x = 4 + 2 = 6 \text{ N}$ , แรงตั้งขึ้น  $F_y = 8 \text{ N}$  (ตั้งฉาก)

หาแรงลัพธ์  $\Sigma F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$

แทนค่าจะได้  $\Sigma F = \sqrt{(6)^2 + (8)^2}$

$$\Sigma F = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10 \text{ N}$$

## 4. L (เรียนรู้แล้วได้อะไร)

4.1 วิเคราะห์ หาแรงลัพธ์ให้อยู่ในแนวเดียวกัน คือ แนวแกน x หรือแนวแกน y

ผลได้  $F_x = 4 + 2 = 6 \text{ N}$  และ  $F_y = 8 \text{ N}$  (ตั้งฉากกัน)

4.2 แก้ปัญหา โดยนำค่า  $F_x$  และ  $F_y$  หาแรงลัพธ์ จาก  $\Sigma F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$

.....

\*\*\* ข้อสังเกต การเขียนภาพแสดงสถานการณ์

- ช่วยให้การจำแนกปริมาณอย่างไร
- ควรใช้วิธีการเขียนภาพ ช่วยการจำแนกปริมาณหรือไม่
- ถ้าไม่เขียนภาพแสดงสถานการณ์ การวิเคราะห์ความสัมพันธ์ของปริมาณจะเป็นอย่างไร
- ตัวอย่าง ส่วนใหญ่จะมีเฉพาะขั้น Do (ทำอย่างไร)
- ขั้นตอน K, W และ L ช่วยการคิดวิเคราะห์อย่างไร

